



KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów szkół podstawowych województwa mazowieckiego
w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	D	C

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 3. (2 pkt)

Trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny. Na przeciwprostokątnej AC zbudowano trójkąt równoboczny ACD . Oblicz miary kątów trójkąta ABD . Rozważ wszystkie możliwości ułożenia trójkątów.

<p>Uczeń:</p> <p>1. analizuje pierwszy przypadek i oblicza miary trójkąta ABD</p> <div data-bbox="475 309 817 609" data-label="Diagram"> </div> <p>Przypadek 1</p> $ \sphericalangle DAB = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$ $ \sphericalangle ADB = 0,5 \cdot 60^\circ = 30^\circ$ $ \sphericalangle ABD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ <p>Miary kątów trójkąta ABD: $105^\circ, 30^\circ, 45^\circ$</p>	1p.
<p>2. analizuje drugi przypadek i oblicza miary trójkąta ABD</p> <div data-bbox="322 913 619 1214" data-label="Diagram"> </div> <p>Przypadek 2</p> $ \sphericalangle DAB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ $ \sphericalangle ADB = 0,5 \cdot 60^\circ = 30^\circ$ $ \sphericalangle ABD = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ <p>Miary kątów trójkąta ABD: $15^\circ, 30^\circ, 135^\circ$</p>	1p.

Zadanie 4. (2 pkt)

W równoległoboku $ABCD$ długość boku AB jest dwa razy dłuższa od długości boku BC . Punkt E jest środkiem odcinka CD . Uzasadnij, że kąt AEB jest kątem prostym.

Uczeń:	
I sposób	1p.
1. dopełnia równoległobok do rombu o boku $2 \cdot BC $	
	1p.
2. korzystając z własności przekątnych rombu wnioskuję, że miara kąta AEB jest równa 90° .	
II sposób	
1. zauważa, że trójkąty AED i BCE są równoramienne ($ AD = DE = EC = CB $). Jeśli oznaczymy $\angle ADE = \alpha$, wówczas $\angle BCE = 180^\circ - \alpha$, zatem $\angle AED = (180^\circ - \alpha) : 2 = 90^\circ - \alpha/2$ (z sumy kątów w trójkącie równoramiennym ADE) zaś $\angle BEC = \alpha/2$ (z sumy kątów w trójkącie równoramiennym BCE).	1p.
2. oblicza $\angle AEB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha/2 + \alpha/2) = 90^\circ$ (kąty $\angle AED, \angle AEB, \angle BEC$ tworzą kąt półpełny).	1p.

Zadanie 5. (2 pkt)

Aniela, Basia i Celina zrywały jabłka. Aniela zerwała 4 kg jabłek, Basia tyle, ile Aniela i połowę tego co Celina, a Celina tyle, ile Basia i połowę tego co Aniela. Ile kilogramów ważyły jabłka zerwane przez dziewczynki?

Uczeń:	
1. zauważa zależności oraz układu i rozwiązuje równanie	1p.
Aniela 4 [kg]	
Basia $(4 + 0,5 x)$ [kg]	
Celina $x = 4 + 0,5 x + 2$	
$0,5 x = 6$	
$x = 12$ [kg] – Celina zerwała 12 kg jabłek	
2. oblicza wagę jabłek zerwanych przez Basię i wagę wszystkich zerwanych przez dziewczynki jabłek	1p.

Basia $4 + 0,5 \cdot 12 = 10$ [kg]	
Jabłka zerwane przez dziewczynki ważyły: $4 + 10 + 12 = 26$ [kg].	

Zadanie 6. (3 pkt)

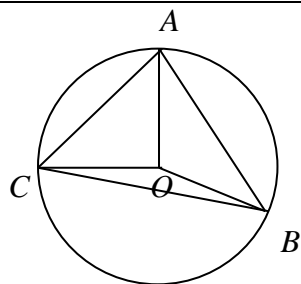
Trzy liczby naturalne dwucyfrowe ustawione w kolejności malejącej stanowią szyfr do sejf. Iloczyn pewnych dwóch spośród tych trzech liczb równa się 888. Iloczyn innych dwóch liczb spośród tych trzech równa się 999. Jaki jest szyfr do tego sejf? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. układa dwa równania $ab = 888$ i $bc = 999$ z trzema niewiadomymi i wykorzystuje fakt, że są to liczby całkowite i dwucyfrowe a z tego zapisu wnioskuje, że b jest wspólnym dzielnikiem liczb 888 i 999.	1p.
2. rozkłada liczby 888 i 999 na czynniki: $888 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$, $999 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ i wnioskuje, że b może się równać 1, 3, 37 lub 111, a jedynym dwucyfrowym czynnikiem jest 37, stąd $b = 37$.	1p.
3. oblicza $a = 888 : 37 = 24$ i $c = 999 : 37 = 27$ i porządkuje liczby malejąco oraz udziela odpowiedzi np. Szyfr do sejf to: 37 27 24.	1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Na okrągłej tarczy zegara połączono odcinkami punkty leżące na jej brzegu i odpowiadające godzinom 4, 9 i 12. Oblicz miary kątów otrzymanego trójkąta.

Uczeń:	
1. zauważa, że po połączeniu środka zegara z wierzchołkami trójkąta ABC mamy trzy trójkąty równoramienne: AOC , AOB , BOC , w których odpowiednio: $\angle AOC$ jest prosty, zatem kąty przy podstawie mają miary równe; $ \angle OCA = \angle OAC = 45^\circ$ $ \angle AOB = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ$, zatem kąty przy podstawie mają miary równe; $ \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$ $ \angle COB = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 150^\circ$, zatem kąty przy podstawie mają miary równe; $ \angle OCB = \angle OBC = 15^\circ$	1p.
2. oblicza miary kątów trójkąta ABC : $ \angle ABC = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$, $ \angle BCA = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$, $ \angle CAB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$	1p.



Miary kątów trójkąta ABC to: 45° , 60° , 75° .

Uwaga: W przypadku obliczenia miary jednego lub miar dwóch kątów trójkąta ABC uczeń otrzymuje 1 pkt, przy pełnym rozwiązaniu uczeń otrzymuje 2 pkt.

Zadanie 8. (2 pkt)

Liczby a i b są parzyste, ich różnica wynosi 6. Wykaż, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 12.

Uczeń:

I sposób

1. zapisuje zależność $a - b = 6$ i wyznacza np. $a = 6 + b$ i podstawia a do wzoru

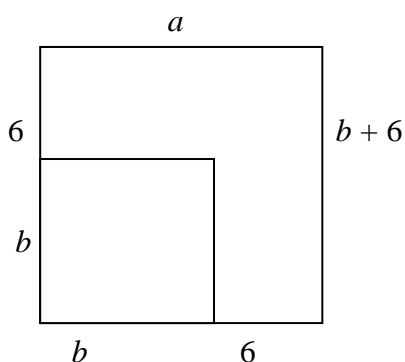
$$a^2 - b^2 = (6 + b)^2 - b^2$$

2. przekształca wyrażenie;

$(6 + b)^2 - b^2 = (6 + b) \cdot (6 + b) - b^2 = 36 + 12b = 12(3 + b)$ i wnioskuje o podzielności iloczynu przez 12.

II sposób

1. rysuje dwa kwadraty: o boku b i polu $P_2 = b^2$ oraz o boku $a = b + 6$ i polu $P_1 = a^2$



zauważa, że różnica pól kwadratów P_1 i P_2 to suma pól prostokątów o bokach 6 i b oraz $b + 6$ i 6

2. oblicza różnicę pól $a^2 - b^2 = 6b + 6(b + 6) = 6b + 6b + 36 = 12b + 36 = 12(b + 3)$

i wnioskuje o podzielności przez 12.

1p.

1p.

1p.

1p.

Zadanie 9. (3 pkt)

Długości krawędzi prostopadłościanu, wyrażone w centymetrach, są liczbami naturalnymi. Jedna ze ścian ma pole 45 cm^2 , a druga 36 cm^2 . Jakie wymiary może mieć ten prostopadłościan? Podaj wszystkie możliwości.

<p>Uczeń:</p> <p>1. oznacza długości boków prostopadłościanu np. a, b, c i zapisuje wzory na pola trzech ścian: $P_1 = ab, P_2 = ac, P_3 = bc$ następnie zauważa że np. dla P_1 i P_2 wspólnym dzielnikiem jest a. Bada iloczyny liczb $45 = 9 \cdot 5$ oraz $36 = 9 \cdot 4$. Na tej podstawie znajduje długości boków prostopadłościanu np. (1 możliwość) $a = 9, b = 5, c = 4$</p> <p>2. znajduje pozostałe dwie możliwości np.: $a = 3, b = 15, c = 12$ lub $a = 1, b = 45, c = 36$</p> <p>Prostopadłościan ten może mieć wymiary: $a = 9, b = 5, c = 4$ lub $a = 3, b = 15, c = 12$ lub $a = 1, b = 45, c = 36$</p> <p><i>Uwaga: Za każdą poprawnie podaną możliwość uczeń otrzymuje 1 pkt.</i></p>	<p>1p.</p> <p>2p.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------

Zadanie 10. (2 pkt)

Sumę 50 składników zmieniono następująco:

pierwszy składnik zmniejszono o 1,

drugi składnik zwiększono o 2,

trzeci składnik zmniejszono o 3,

czwarty składnik zwiększono o 4,

itd.,

pięćdziesiąty składnik zwiększono o 50.

Jak zmieniła się wartość tej sumy? Odpowiedź uzasadnij.

<p>Uczeń:</p> <p>1. zauważa np., że każda para składników, po zmianie, zwiększa się o 1.</p> <p>2. zauważa prawidłowość przy kolejnych parach składników i stwierdza, że przy 50 składnikach czyli 25 parach suma (po zmianie) zwiększa się o 25.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------