KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów szkół podstawowych województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

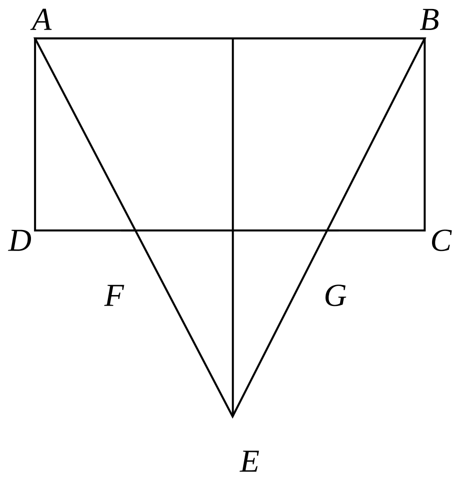
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**D**	**C**	**A**	**D**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Na boku *AB* trójkąta równobocznego *ABE* zbudowano prostokąt *ABCD* o bokach $|AB| = 2$ i $|AD| = 1$ tak, że obydwie figury częściowo się pokrywają. Oblicz, jakie jest pole tej części trójkąta, którą zakrywa prostokąt.

<table>
<tr><td>Uczeń:
1. analizuje dane zadania i zauważa, że szukaną figurą jest trapez równoramienny,


następnie oblicza wysokość h w trójkącie FGE: $h = \sqrt{3} - 1$ oraz bok trójkąta równobocznego FGE, bok $|FG| = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$
2. oblicza pole trapezu ABGF: $P_{ABGF} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$
Uwaga: dopuszcza się obliczenia bez usuwania niewymierności z mianownika.</td><td>1p.

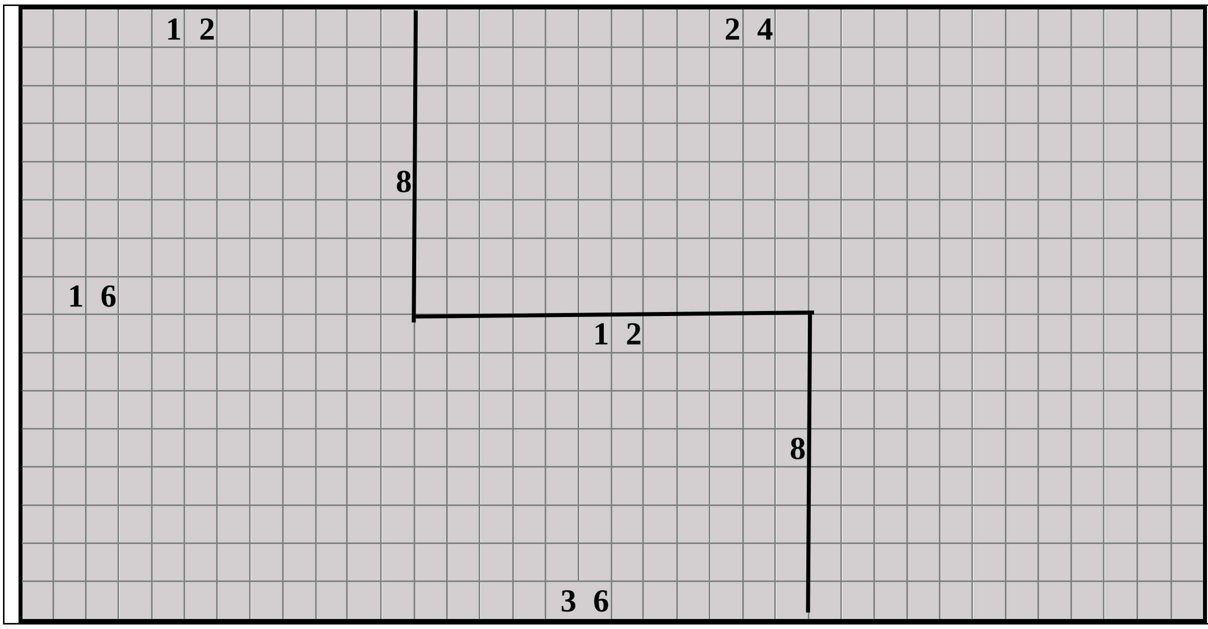
1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 6. (2 pkt)

Wykaż, że prostokąt o wymiarach 16×36 można podzielić na dwa wielokąty, z których da się złożyć kwadrat.

<table>
<tr><td>Uczeń:
1. oblicza pole prostokąta $36 \cdot 16 = 576$ i bok kwadratu o takim samym polu – bok kwadratu jest równy 24;
2. dzieli prostokąt - rysuje łamaną zgodnie z rysunkiem.</td><td>1p.

1p.</td></tr>
</table>



Zadanie 7. (2 pkt)

Suma pewnych dwóch liczb wynosi $\sqrt{20}$, a ich różnica $\sqrt{12}$. Wykaż, że iloczyn tych liczb jest równy 2.

Uczeń: 1. zapisuje sumę i różnicę dwóch liczb np. dla a i b $a+b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $a-b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ i oblicza $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ 2. oblicza iloczyn liczb a i b $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})=5-3=2$ lub 1. korzysta z tożsamości $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ lub przekształca tożsamość otrzymując $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ 2. oblicza $4ab=(\sqrt{20})^2-(\sqrt{12})^2=8$, więc $ab=2$	1p. 1p. 1p. 1p.

Zadanie 8. (2 pkt)

Dwa samochodziki ***A*** i ***B***, ustawione na linii START ruszyły jednocześnie w kierunku METY. Samochodzik ***A*** pokonał początkowe 25 cm w czasie 4 sekund. Samochodzik ***B*** pokonał początkowe 30 cm w czasie 5 sekund. Na całej trasie samochodziki nie zmieniały prędkości. Na metę jeden z nich przyjechał dwie sekundy przed drugim.

Jak długa była trasa wyścigu?

Uczeń: 1. oblicza prędkości samochodziku ***A*** i ***B*** ***A*** 25 : 4 = 6,25 [cm/s] ***B*** 30 : 5 = 6 [cm/s]	1p.
2. oblicza czas (*t*) potrzebny na przebycie drogi od startu do mety 6,25$\cdot$ *t* = (*t* +2) $\cdot$ 6, skąd *t* = 48 [s]. Oblicza drogę *S* = 6,25 $\cdot$ 48 = 300 [cm] lub *S* = 6 $\cdot$ 50 = 300 [cm] = 3[m].	1p.
lub 1. znajduje NWW (25,30) = 150 i oblicza czas przejazdu tego odcinka dla każdego samochodziku: ***B*** przejeżdża dystans 150 cm w ciągu 5 $\cdot$ 5 = 25 [s] ***A*** przejeżdża dystans 150 cm w ciągu 6 $\cdot$ 4 = 24 [s]	1p.
2. wnioskuje, że na 150 cm różnica czasu jest 25 – 24 = 1[s], to droga jest równa 2 $\cdot$ 150 = 300 [cm] = 3[m] Odp. Trasa wyścigu miała długość 3 m (300 cm).	1p.

Zadanie 9. (2 pkt)

Mamy prostopadłościenne klocki o wymiarach 1 x 2 x 4. Jaka jest najmniejsza liczba takich klocków, aby można było z nich zbudować sześcian o krawędzi wyrażającej się liczbą naturalną? Jak zmieni się liczba klocków, gdy będziemy budować sześcian z klocków o wymiarach 2 x 4 x 8? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. zauważa, że najmniejszym sześcianem zbudowanym z klocków o wymiarach 1 x 2 x 4 jest sześcian o krawędzi 4 i wnioskuje, że należy dołożyć jeszcze 7 takich prostopadłościanów (Odp. Razem należy użyć minimum 8 klocków);	1p.
2. zauważa, że dla prostopadłościanów, których krawędzie są dwa razy większe tj. 2 x 4 x 8 liczba dostawionych sześcianów jest taka sama, krawędź nowego sześcianu jest równa 8 (Odp. Liczba klocków nie zmieni się).	1p.

Zadanie 10. (2 pkt)

Bok *kwadratu nr I* ma długość 12. Bok *kwadratu nr II* ma długość równą długości przekątnej *kwadratu nr I*. Ogólnie: bok *kwadratu nr n* ma długość równą długości przekątnej *kwadratu nr (n-1)*. Jaki numer będzie miał kwadrat, którego bok ma długość większą od 100 i mniejszą od 200? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:

1. oblicza kolejne boki i przekątne kwadratów: 1p.

Numer kwadratu	bok	przekątna
I	12	$12\sqrt{2}$
II	$12\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 24$
III	24	$24\sqrt{2}$
IV	$24\sqrt{2}$	$24\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 48$
V	48	$48\sqrt{2}$
VI	$48\sqrt{2}$	$48\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 96$
VII	96	$96\sqrt{2}$
VIII	$96\sqrt{2}$	$96\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 192$
IX	192	

2. stwierdza, że *kwadrat nr VIII* będzie miał bok równy $96\sqrt{2}$ $(100 < 96\sqrt{2} < 200)$ 1p.
lub stwierdza, że *kwadrat nr IX* będzie miał bok równy 192 $(100 < 192 < 200)$.

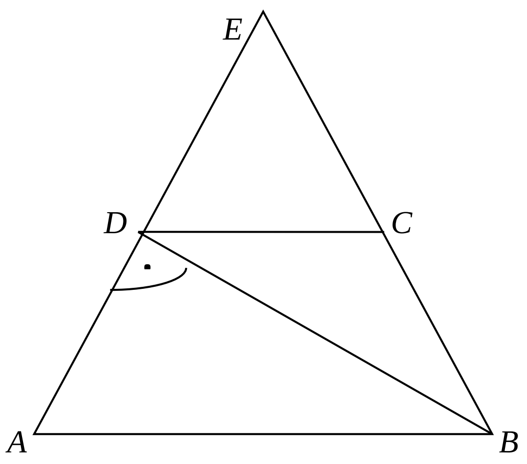
Odp. *Kwadrat nr VIII, kwadrat nr IX* .

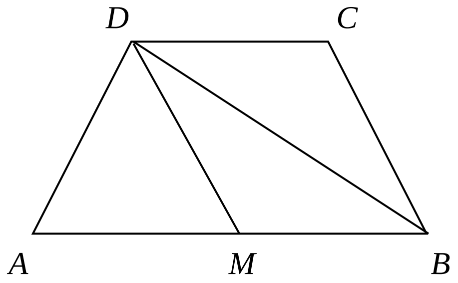
Uwaga: dopuszcza się podanie w odpowiedzi tylko jednego kwadratu.

Zadanie 11. (2 pkt)

W trapezie równoramiennym przekątna jest prostopadła do ramienia i dzieli kąt ostry trapezu na dwa kąty o równej mierze. Uzasadnij, że długość jednej podstawy trapezu jest dwa razy dłuższa od długości drugiej podstawy.

Uczeń:



1. przedłuża ramiona trapezu i otrzymuje trójkąt *ABE,* stwierdza, że jest to trójkąt równoboczny, bo trójkąt prostokątny *ABD* ma kąty ostre 60° i 30°, miara kąta *ABE* jest równa 60°, więc miara kąta *AEB* jest równa się 60°;	1p. 1p.
2. zauważa, że przekątna *DB* jest wysokością trójkąta równobocznego *ABC,* dzieli więc bok *AE* na połowy (|*AE*| = |*AB*|) . Zauważa, że trójkąt *DCE* jest trójkątem o kątach równych 60° - jest więc równoboczny, a zatem bok |*DC*| = |*DE*| = 0,5 |*AB*|.	
lub 	
1. zaznacza środek *M* boku *AB* w trapezie *ABCD* i uzasadnia, że czworokąt *MBCD* jest rombem;	1p.
2.wskazuje na równość boków czworokąta *MBCD* i wnioskuje, że |*MB*| = |*DC*| = 0,5 |*AB*|.	1p.

Zadanie 12. (2 pkt)

Miesięczny dochód pana Piotra stanowi $\frac{5}{8}$ łącznego miesięcznego dochodu pana Piotra i pana Jana. Natomiast suma miesięcznych wydatków obu panów stanowi $\frac{7}{8}$ ich łącznych miesięcznych dochodów. Każdy z panów oszczędza miesięcznie 600 zł. Oblicz roczny dochód pana Jana.

Uczeń: 1. oznacza np. przez x - łączne miesięczne dochody, przez $\frac{7}{8}x$ – łączne miesięczne wydatki. Korzystając z zależności podanych w zadaniu układa i rozwiązuje równanie: $\frac{5}{8}x+\frac{3}{8}x-1200=\frac{7}{8}x$; otrzymuje $x = 9600$ zł,	1p.
2. oblicza miesięczny dochód pana Jana $\frac{3}{8}\cdot$ 9600 = 3600 zł, następnie oblicza roczny dochód pana Jana - 43200 zł. Odp. Roczny dochód pana Jana to 43200 zł.	1p.