MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP SZKOLNY 2024/2025

Ważne terminy!

Zgodnie z harmonogramem termin ogłoszenia wyników w szkole mija **23 października 2024 r.**

Najpóźniej do 31 października 2024 r. należy bezwzględnie wprowadzić wyniki **wszystkich uczniów** na Platformę Konkursów Przedmiotowych. Zgłoszenie uczestników po wyznaczonym terminie nie będzie przyjęte i **skutkuje ich dyskwalifikacją**.

19 listopada 2024 r. będzie można zapoznać się z listą uczniów zakwalifikowanych do etapu rejonowego oraz przekazać informację o ewentualnym zakwalifikowaniu się do kolejnego etapu konkursu uczniom i ich rodzicom/opiekunom prawnym.

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może otrzymać maksymalnie 1 punkt, a za rozwiązanie zadania otwartego 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA ZADAŃ

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	A., D.	P., F.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 3. (0-2 pkt)

Liczby a, b i c są dodatnie oraz $ab = 18$, $bc = 42$, a $ac = 21$.
Oblicz wartość wyrażenia $a^2 - b^2 + 2c$.

I sposób

Uczeń: 1. Analizuje treść zadania i zapisuje wielkości b i c w zależności od a. $b = \frac{18}{a}$, $c = \frac{21}{a}$.	1p.
2. Wyznacza wartości a, b, c i oblicza wartość wyrażenia. $bc = \frac{18}{a} \cdot \frac{21}{a} = 42$, stąd $a^2 = \frac{18 \cdot 21}{42} = 9$, więc $a = 3, b = 6, c = 7$. Zatem $a^2 - b^2 + 2c = 9 - 36 + 14 = -13$.	1p.

II sposób

Uczeń:	
1. Analizuje treść zadania i oblicza wartość iloczynu *abc*. $ab \cdot bc \cdot ac = a^2b^2c^2 = 18 \cdot 42 \cdot 21 = 3^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 = 9^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2$, stąd $abc = 9 \cdot 2 \cdot 7$.	1p.
2. Wyznacza wartości *a*, *b*, *c* i oblicza wartość wyrażenia. $c = \frac{abc}{ab} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 7}{18} = 7$, $a = \frac{21}{c} = 3$, $b = \frac{42}{c} = 6$. Zatem $a^2 - b^2 + 2c = 9 - 36 + 14 = -13$.	1p.

III sposób

Uczeń:	
1. Analizuje treść zadania i oblicza wartość *a*. $a^2 = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2} = \frac{ab \cdot bc \cdot ac}{(bc)^2} = \frac{18 \cdot 42 \cdot 21}{42^2} = 9$, więc $a = 3$.	1p.
2. Wyznacza wartości *b*, *c* i oblicza wartość wyrażenia. $c = \frac{21}{a} = 7$, $b = \frac{42}{c} = 6$. Zatem $a^2 - b^2 + 2c = 9 - 36 + 14 = -13$.	1p.

IV sposób

Uczeń: 1. Analizuje treść zadania i zapisuje wielkość b w zależności od a. $\frac{bc}{ac} = \frac{42}{21} = 2$, więc $b = 2a$.	1p.
2. Wyznacza wartości a, b, c i oblicza wartość wyrażenia. $a \cdot 2a = 18$, więc $a = 3$, $b = 2a = 6$, $c = \frac{21}{a} = 7$ Zatem $a^2 - b^2 + 2c = 9 - 36 + 14 = -13$.	1p.

Zadanie 4. (0-2 pkt)

W poniedziałek Jacek przebył drogę z domu do szkoły i z powrotem na rowerze. We wtorek do szkoły jechał rowerem, a z powrotem szedł piechotą z powodu awarii roweru. Okazało się, że czas podróży tego dnia był 2 razy dłuższy niż w poniedziałek. W środę drogę w obie strony przebył piechotą. Oblicz, ile razy dłużej trwała podróż Jacka w środę niż w poniedziałek. Zakładamy, że średnia prędkość jazdy na rowerze, jak i marszu w poszczególnych dniach, była jednakowa.

I sposób

<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Analizuje treść zadnia i przyjmuje oznaczenia oraz zapisuje zależności między nimi.

Oznaczenia:

r – czas w jedną stronę na rowerze

p – czas w jedną stronę na piechotę

t – czas podróży we wtorek

$2r$ – czas podróży w poniedziałek

$2p$ – czas podróży w środę

$p + r = t,$

$2r = \frac{1}{2}t,$

$2t = 2r + 2p.$

2. Oblicza, ile razy dłużej trwała podróż Jacka w środę niż w poniedziałek oraz podaje odpowiedź.

$2p = 2t - \frac{1}{2}t = \frac{3}{2}t$

Zatem
$\frac{2p}{2r} = \frac{3}{2}t : \frac{1}{2}t = 3$

Odpowiedź. Podróż Jacka w środę trwała 3 razy dłużej niż w poniedziałek.
</td><td>
1p.

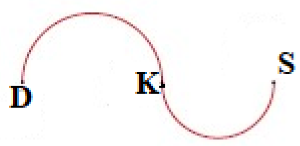
1p.
</td></tr>
</table>

II sposób

Uczeń: 1. Analizuje treść zadnia i przyjmuje oznaczenia oraz zapisuje zależności między nimi. Oznaczenia: r – czas w jedną stronę na rowerze p – czas w jedną stronę na piechotę $r + p$ – czas podróży we wtorek $2r$ – czas podróży w poniedziałek $2p$ – czas podróży w środę $4r = r + p$, stąd $p = 3r$	1p.
2. Oblicza, ile razy dłużej trwała podróż Jacka w środę niż w poniedziałek oraz podaje odpowiedź. $2p = 6r$ Zatem $\frac{6r}{2r} = 3$ Odpowiedź. Podróż Jacka w środę trwała 3 razy dłużej niż w poniedziałek.	1p.

Zadanie 5. (0-2 pkt)

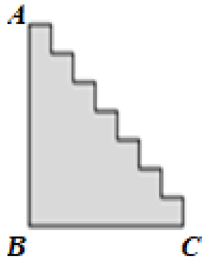
Kasia przedstawiła na rysunku obok trasę, jaką dojeżdża z domu do szkoły. Odległość z kina (**K**) do szkoły (**S**) stanowi $\frac{4}{9}$ całej trasy, a odległość z domu (**D**) do kina jest równa 1075 m. Oblicz, w jakiej skali wykonała ten rysunek, jeśli cała trasa na rysunku ma 4,5 cm.



Uczeń: 1. Wykonuje analizę zadania i i oblicza długość całej trasy w centymetrach. $\frac{5}{9}$ trasy to 1075, więc cała trasa to $\frac{9}{5} \cdot 1075 = 9 \cdot 215 = 1935$ m = 193 500 cm,	1p.
2. Oblicza skalę w jakiej wykonano rysunek . Skala to $\frac{4{,}5}{193500} = \frac{45}{1935000} = \frac{9}{387000} = \frac{1}{43\,000} = 1{:}\,43\,000$	1p.

Zadanie 6. (0-3 pkt)

W wielokącie przedstawionym na rysunku, każde dwa sąsiednie boki są prostopadłe. Długości boków *AB* i *BC* różnią się o 2, a długości krótszych boków równoległych do boku *AB* są równe, podobnie długości krótszych boków równoległych do boku *BC* też są równe. Obwód tego wielokąta wynosi 32. Oblicz długości boków *AB* i *BC* oraz pole prostokąta zbudowanego z dwóch takich wielokątów.



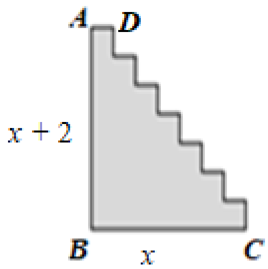
Uczeń:

1. Wykonuje analizę zadania i zapisuje sumę długości boków równoległych do boków *AB* oraz *BC* . — 1p.

S - suma długości boków równoległych do boków *AB* oraz *BC*,

S_1 - suma długości boków równoległych do boku *AB*,

S_2 - suma długości boków równoległych do boku *BC*.



$S_1 = |AB| = x + 2$

$S_2 = |BC| = x$

$S = x + x + 2 = 2x + 2$

2. Oblicza długości boków: *AB, BC, AD.* — 1p.

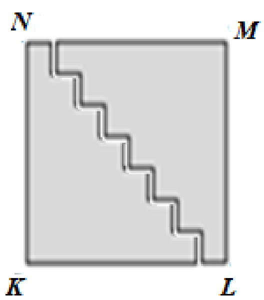
$2(2x + 2) = 32$

$4x = 28$

$x = 7$

Zatem $|AB| = 9, \quad |BC| = 7, \quad |AD| = \frac{1}{7}|BC| = 1$

3. Oblicza pole prostokąta *KLMN*. — 1p.



$|KN| = |AB| = 9, \quad |KL| = |BC| + 1 = 8,$

$P_{KLMN} = 9 \cdot 8 = 72$

Zadanie 7. (0-3 pkt)

W trójkącie równoramiennym *ABC* boki *AC* i *BC* są ramionami. Na boku *AC* zaznaczono punkt *D* tak, że $|AB| = |BD| = |DC|$. Oblicz miary kątów trójkąta *BDC*.

I sposób

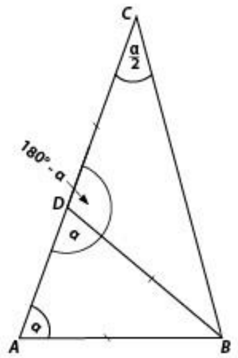
<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania i przedstawia ją np. za pomocą rysunku.

W trójkącie ABC: $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$

W trójkącie ABD: $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$

W trójkącie BDC: $|\sphericalangle CDB| = 180° - \alpha$



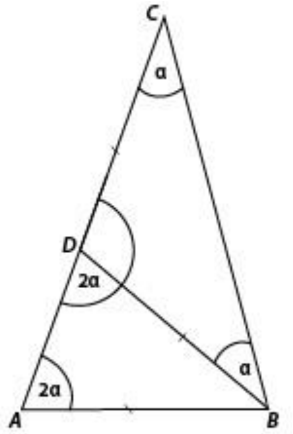
</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>
2. Oblicza miarę kąta α.

W trójkącie BDC: $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CBD| = \frac{180°-(180°-\alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$,

w trójkącie ABC: $\alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180°$, stąd $2{,}5\alpha = 180°$, więc $\alpha = 72°$,
</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>
3. Wyznacza miary kątów trójkąta BDC i podaje odpowiedź.
$|\sphericalangle CDB| = 180° - 72° = 108°$, $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CBD| = \frac{72°}{2} = 36°$

Odpowiedź. Miary kątów trójkąta BDC wynoszą: 108°, 36°, 36°.
</td><td>1p.</td></tr>
</table>

II sposób

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania i przedstawia ją np. za pomocą rysunku. Niech $\lvert\sphericalangle DCB\rvert = \lvert\sphericalangle DBC\rvert = \alpha$, wówczas $\lvert\sphericalangle ADB\rvert = \lvert\sphericalangle CAB\rvert = 2\alpha$, stąd $\lvert\sphericalangle ABD\rvert = 2\alpha - \lvert\sphericalangle DBC\rvert = 2\alpha - \alpha = \alpha$.  	1p.
2. Oblicza miarę kąta α. $5\alpha = 180°$, czyli $\alpha = 36°$.	1p.
3. Oblicza miary kątów trójkąta *BDC* oraz podaje odpowiedź. W trójkącie *BDC*: $\lvert\sphericalangle DCB\rvert = \lvert\sphericalangle CBD\rvert = 36°$, $\lvert\sphericalangle CDB\rvert = 180° - 72° = 108°$. Odpowiedź. Miary kątów trójkąta *BDC* wynoszą: 108°, 36°, 36°.	1p.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

Tabelę o wymiarach 23×88 podzielono na kwadraty o boku 1. W każdy kolejny kwadrat wpisano jedną, kolejną liczbę naturalną, począwszy od 1. W tej tabeli zakreślono krzyżykiem wszystkie liczby podzielne przez 3, kółkiem wszystkie liczby podzielne przez 4, a trójkątem wszystkie liczby podzielne przez 6. Oblicz, ile liczb zostało zakreślonych dokładnie dwoma znakami.

I sposób

Uczeń: 1. Oblicza, ile jest wszystkich liczb w tabeli i ile z nich jest zakreślonych trójkątem. Wszystkich liczb w tabeli jest $23 \cdot 88 = 2024$ Liczb zakreślonych trójkątem, czyli liczb podzielnymi przez 6 jest 337, bo $2024 : 6 = 337\ r\ 2$	1p.
2. Wyjaśnia, ile co najwyżej liczb jest zakreślonych dwukrotnie. Zauważa, że każda liczba zakreślona krzyżykiem została również zakreślona trójkątem, zatem liczb zakreślonych dwukrotnie jest co najwyżej 337.	1p.
3. Oblicza, ile liczb zostało zakreślonych dwoma znakami. Zauważa, że wśród 337 liczb są jeszcze liczby zakreślone trzy razy, czyli podzielne przez 12. Jest ich 168, bo $2024 : 12 = 168\ r\ 8$ Zatem wśród liczb podzielnych przez 6, czyli liczb zakreślonych dwukrotnie jest $337 - 168 = 169.$	1p.

II sposób

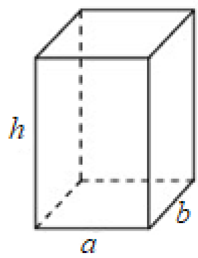
Uczeń: 1. Oblicza, ile jest wszystkich liczb w tabeli i ile z nich jest zakreślonych trójkątem. Wszystkich liczb w tabeli jest $23 \cdot 88 = 2024$ Liczb zakreślonych trójkątem, czyli liczb podzielnych przez 6 jest 337, bo $2024 : 6 = 337\ r\ 2$	1p.
2. Wyjaśnia, jaką własność mają liczby zakreślone dokładnie dwoma znakami. Zauważa, że liczba podzielna przez 4 oraz przez 6 jest także podzielna przez 3 oraz liczba podzielna przez 3 i przez 4 jest także podzielna przez 6. Wobec tego liczby zakreślone dokładnie dwoma znakami są podzielne przez 6, a niepodzielne przez 4.	1p.
3. Oblicza, ile liczb zostało zakreślonych dwoma znakami. Zauważa, że co druga (począwszy od 12) spośród 337 liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 4. Zatem liczb zakreślonych dokładnie dwoma znakami jest $\frac{337+1}{2} = 169.$	1p.

III sposób

Uczeń: 1. Oblicza, ile jest wszystkich liczb w tabeli. Wszystkich liczb w tabeli jest $23 \cdot 88 = 2024$, zatem szukamy liczb wśród liczb naturalnych od 1 do 2024.	1p.
2. Zauważa, jaką własność mają szukane liczby w tym zbiorze. Każda z szukanych liczb od 1 do 2024 jest podzielna przez 6, ale nie jest podzielna przez 12. Tę własność ma co dwunasta liczba począwszy od 6 i żadne inne liczby jej nie mają.	1p.
3. Oblicza, ile liczb zostało zakreślonych dwoma znakami. $1 + (2024 - 6) : 12 = 169.$	1p.

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Objętość prostopadłościanu jest równa 960, a mniejsza z jego ścian bocznych ma pole powierzchni równe 96. Krótszą z krawędzi jego podstawy wydłużono o 4, a dłuższą wydłużono o 20%, wówczas objętość prostopadłościanu wzrosła o 768. Uzasadnij, że powstały prostopadłościan jest sześcianem.

Uczeń: 1. Analizuje treść zadania i przedstawia ją np. za pomocą rysunku oraz oblicza długość krawędzi a.  Wymiary prostopadłościanu na rysunku są przed zmianą. Ponieważ $abh = 960$ oraz $bh = 96,$ więc $a = 10$	1p.
2. Zapisuje objętość prostopadłościanu po zmianie w postaci równania i oblicza pozostałe wymiary prostopadłościanu przed. $1{,}2a(b+4)\cdot h = 960 + 768 = 1728$ $12(b+4)\cdot h = 1728$ $(b+4)\cdot h = 144$ $bh + 4h = 144$ $96 + 4h = 144$ $4h = 48$ $h = 12,\ \ bh = 96$, więc $b = 8$.	1p.
3. Uzasadnia, że powstały prostopadłościan jest sześcianem. Wymiary prostopadłościanu po zmianie: $1{,}2a \times (b+4) \times h.$ Długości boków otrzymanego prostopadłościanu wynoszą: $1{,}2a = 12,$ $(b+4) = 12,$ $h = 12,$ zatem ten prostopadłościan jest sześcianem.	1p.