MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP WOJEWÓDZKI 2023/2024

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

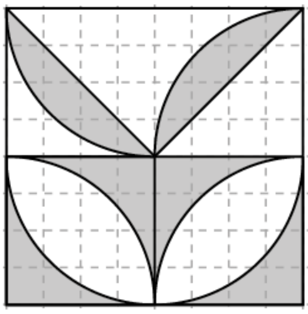
Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**B., C.**	**A., C.**	**P, P**	**B., C.**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (0-2 pkt)

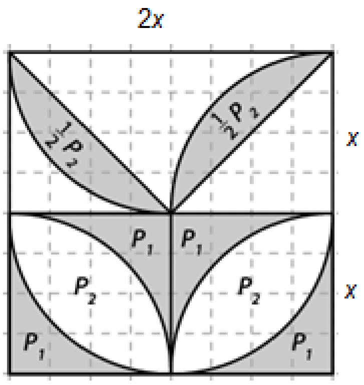


Wewnątrz kwadratu zacieniowano pole, którego brzegi są odcinkami lub częściami okręgu. Wykaż, że zacieniowane pole stanowi mniej niż $\frac{3}{8}$ pola kwadratu. W uzasadnieniu możesz przyjąć, że $\pi > 3$.

I sposób

Uczeń:

1. Oznacza pola części wzoru np. tak, jak na poniższym rysunku i zapisuje je za pomocą wyrażenia: **1p.**



$$P_1 = \frac{2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}}{2} = \frac{4x^2 - \pi x^2}{4},$$

$$P_2 = x^2 - 2P_1 = x^2 - \frac{4x^2 - \pi x^2}{2} = \frac{-2x^2 + \pi x^2}{2}.$$

2. Zapisuje za pomocą wyrażenia zacieniowane pole P_z oraz uzasadnia, że stanowi ono mniej niż $\frac{3}{8}$ pola kwadratu: **1p.**

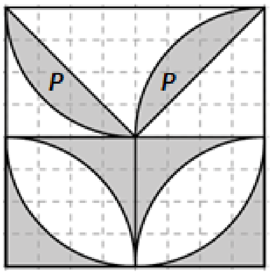
$$P_z = 2x^2 - P_2 = 2x^2 - \frac{-2x^2 + \pi x^2}{2} = \frac{6x^2 - \pi x^2}{2},$$

$$\frac{\frac{6x^2 - \pi x^2}{2}}{4x^2} = \frac{6x^2 - \pi x^2}{8x^2}.$$

Przyjmując, że $\pi > 3$ otrzymujemy:

$$\frac{6x^2 - \pi x^2}{8x^2} < \frac{6x^2 - 3x^2}{8x^2} = \frac{3}{8}.$$

II sposób

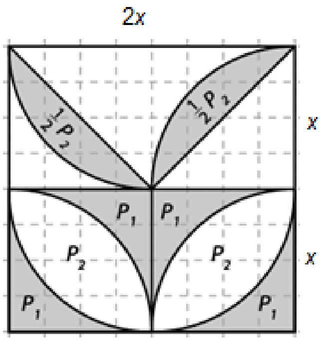
Uczeń:	
1. Oznacza pole części wzoru np. tak, jak na poniższym rysunku i zapisuje je za pomocą wyrażenia:  $P = \frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{\pi x^2 - 2x^2}{4}.$	1p.
2. Oblicza zacieniowane pole P_z oraz uzasadnia, że stanowi ono mniej niż $\frac{3}{8}$ pola kwadratu: $P_z = 2x^2 - 2P = 2x^2 - \frac{\pi x^2 - 2x^2}{2} = \frac{6x^2 - \pi x^2}{2},$ $\frac{\frac{6x^2-\pi x^2}{2}}{4x^2} = \frac{6x^2 - \pi x^2}{8x^2}.$ Przyjmując, że π > 3 otrzymujemy: $\frac{6x^2-\pi x^2}{8x^2} < \frac{6x^2-3x^2}{8x^2} = \frac{3}{8}.$	1p.

III sposób

<table>
<tr><td>

Uczeń:

1. Oznacza pola części wzoru np. tak, jak na poniższym rysunku i zapisuje je za pomocą wyrażenia:



$$P_1 < \frac{2x^2 - \frac{3x^2}{2}}{2} = \frac{4x^2 - 3x^2}{4} = \frac{x^2}{4},$$

$$P_2 > \frac{2x^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{4}}{2} = \frac{2x^2 - x^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>

2. Oblicza zacieniowane pole P_z oraz uzasadnia, że stanowi ono mniej niż $\frac{3}{8}$ pola kwadratu:

$$P_z = x^2 + 2P_1 < x^2 + \frac{x^2}{2} = 1{,}5x^2,$$

$$\frac{P_z}{4x^2} < \frac{1{,}5x^2}{4x^2} = 0{,}375 = \frac{3}{8}.$$

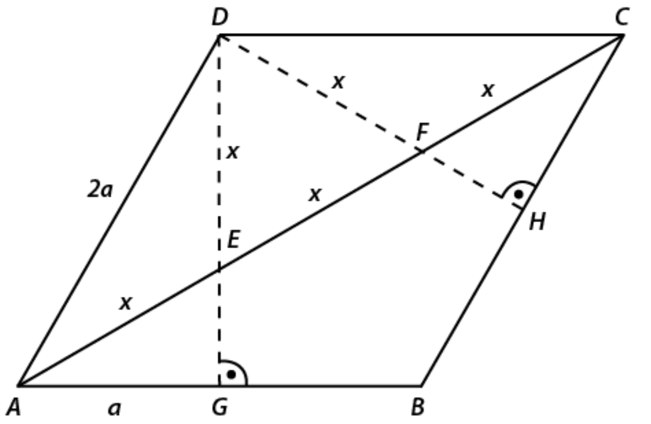
</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 6. **(0-2 pkt)**

Uzasadnij, że jeśli w rombie symetralne dwóch sąsiednich boków przecinają się w wierzchołku kąta rozwartego, to dzielą dłuższą przekątną rombu na trzy równe odcinki.

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku oraz oblicza miary kątów rombu: 1p.



Trójkąt *AGD* jest prostokątny, w którym przeciwprostokątna jest dwa razy dłuższa od jednej z przyprostokątnych, a więc jest połową trójkąta równobocznego, zatem $|\sphericalangle DAG| = 60°$.
Zatem miary kątów rombu wynoszą: $60°, 60°, 120°, 120°$.

2. Uzasadnia, że odcinki *AE*, *EF*, *FC* są równe: 1p.

W trójkącie *AED*: $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle ADE| = 30°$,stąd $|AE| = |DE| = x$.
Trójkąty *DFC* i *AED* są przystające, stąd $|DF| = |FC| = x$.
Ponieważ $|\sphericalangle ADC| = 120°$, więc w trójkącie *EDF*:
$|\sphericalangle EDF| = 60°$ oraz $|DE| = |DF| = x$, więc $|EF| = x$.
Zatem $|AE| = |EF| = |FC| = x$.

Zadanie 7. (0-2 pkt)

Liczba naturalna *n* przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3. Jaką resztę przy dzieleniu przez 5 daje liczba $(3n-1)^2$? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. Przekształca wyrażenie $(3n-1)^2$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia oraz zapisuje liczbę n w postaci wyrażenia algebraicznego: $(3n-1)^2 = 9n^2 - 6n + 1$, gdzie $n = 5x + 3$.	1p.
2. Oblicza resztę z dzielenia liczby $(3n-1)^2$przez 5 i podaje odpowiedź: $9n^2 - 6n + 1 = 9(5x+3)^2 - 6(5x+3) + 1 =$ $= 9(25x^2 + 30x + 9) - 30x - 18 + 1 =$ $= 225x^2 + 270x + 81 - 30x - 18 + 1 = 225x^2 + 240x + 64 =$ $= (225x^2 + 240x + 60) + 4 = 5(45x^2 + 48x + 12) + 4.$ Odpowiedź. Reszta przy dzieleniu liczby $(3n-1)^2$przez 5 wynosi 4.	1p.

Zadanie 8. (0-2 pkt)

Do zaszyfrowania załączników wysyłanych pocztą elektroniczną pewna firma stosuje kody składające się z 3 liter i 3 cyfr, które powstają według zasady:
W kodzie występują tylko litery C, L, Z i dowolne cyfry, przy czym litery i cyfry nie mogą się powtarzać oraz litery C i L „stoją” obok siebie.
Oblicz, ile takich kodów można utworzyć.

Uczeń:

1. Oblicza, ile jest kodów, jeśli układ liter jest CL: **1p.**

A.

C	L				

B.

	C	L			

C.

		C	L		

D.

			C	L	

E.

				C	L

W ustawieniu A. literę Z można obsadzić na 4 sposoby, pozostałe trzy miejsca można obsadzić na 10, 9 i 8 sposobów. W tym ustawieniu jest:
$4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 2880$ kodów.
Podobnie jest w ustawieniach B., C., D., E.
Zatem wszystkich kodów z układem liter CL jest:
$5 \cdot 2880 = 14400$.

2. Oblicza, ile wszystkich kodów można utworzyć: **1p.**

Jeśli układ liter jest LC, to sytuacja jest analogiczna do tej z punktu 1., więc tych kodów jest 14 400.
Zatem wszystkich kodów powstałych według opisanej zasady jest

$$14\,400 + 14\,400 = 28\,800.$$

Zadanie 9. (0-2 pkt)

Suma dwóch liczb naturalnych a i b jest mniejsza niż 270. Trzykrotność liczby a jest równa dwukrotności liczby b. Znajdź liczby spełniające warunki zadania takie, aby liczba a była możliwie największa. Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania np.: zapisuje nierówność i równanie oraz rozwiązuje nierówność ze względu na liczbę x: a, b – liczby naturalne, $a + b < 270$ $a = 2x,\ \ b = 3x$, gdzie x jest liczbą naturalną. $2x + 3x < 270,$ $5x < 270,$ $x < 54.$ 2. Wyznacza szukane liczby a i b i podaje odpowiedź: Skoro liczba x jest naturalna, to największą liczbą spełniającą warunek $x < 54$ jest 53, więc $a = 2x = 106,$ $b = 3x = 159.$ Odpowiedź. Szukane liczby to 106 i 159.	1p. 1p.

II sposób

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania np.: zapisuje nierówność i równanie oraz rozwiązuje nierówność ze względu na liczbę a: a, b – liczby naturalne, $a + b < 270$ oraz $3a = 2b$, więc $a = \frac{2}{3}b$. $b < 270 - a$ oraz $a = \frac{2}{3}b$, więc: $a < \frac{2}{3}(270 - a)$, $a < 180 - \frac{2}{3}a$, $\frac{5}{3}a < 180$, $a < 108$.	1p.
2. Wyznacza szukane liczby a i b i podaje odpowiedź: Największą liczbą a spełniającą nierówność $a < 108$ jest 107, ale największą liczbą a spełniającą warunki zadania jest 106, bo liczba $3a$ musi być parzysta. $3a = 2b$, $3 \cdot 106 = 2b$, $b = \frac{318}{2} = 159$. Odpowiedź. Szukane liczby to 106 i 159.	1p.

III sposób

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania np.: zapisuje nierówność i równanie oraz rozwiązuje nierówność ze względu na liczbę *x*: a, b – liczby naturalne, $a + b < 270$ $a = 2x,\ b = 3x$, gdzie *x* jest liczbą naturalną. $2x + 3x < 270$, $5x < 270$, $x < 54$.	1p.
2. Wyznacza szukane liczby a i b i podaje odpowiedź: $a = 2x < 108$. Największą liczbą parzystą a spełniającą tę nierówność jest 106. Liczba b jest podzielna przez 3. $b = 3x < 162$, więc $b = 159$. Odpowiedź. Szukane liczby to 106 i 159.	1p.

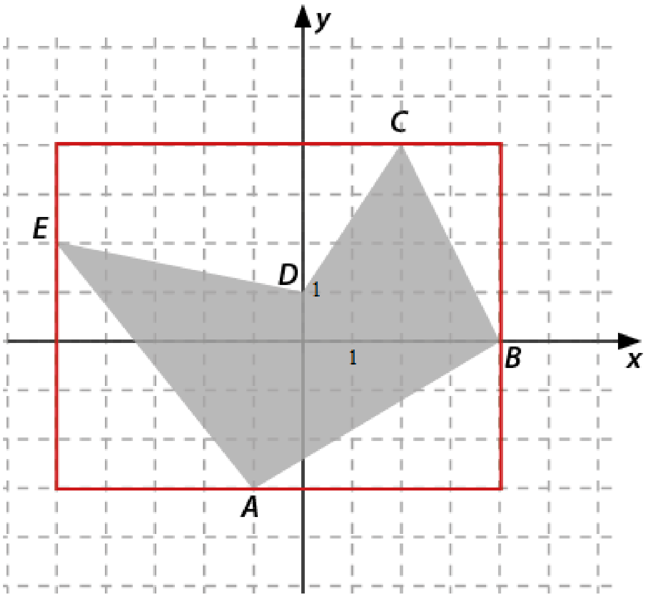
Zadanie 10. (0-3 pkt)

Oblicz pole pięciokąta *ABCDE*, którego wierzchołki leżą w punktach:

$A = \left(k+5, \frac{k}{2}\right)$, $B = \left(\frac{-k}{3}+2, k+6\right)$, $C = \left(\frac{k^2}{2\cdot 3^2}, -k-2\right)$,

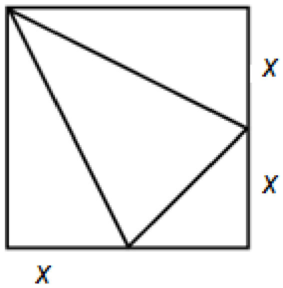
$D = \left(\frac{1}{2}k+3, k^0\right)$, $E = \left(k+1, \frac{-12}{k}\right)$

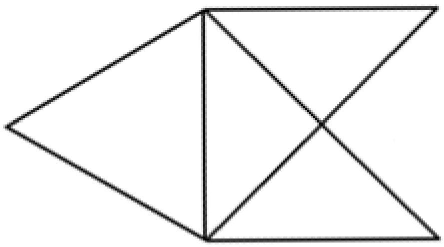
wiedząc, że k wynosi – 6.

Uczeń: 1. Oblicza współrzędne wierzchołków pięciokąta: $A = (-1,-3)$, $B = (4,0)$, $C = (2,4)$, $D = (0,1)$, $E = (-5,2)$.	1p.
2. Wykonuje w układzie współrzędnych rysunek pięciokąta *ABCDE* i wskazuje metodę liczenia pola (np. uzupełnia go do prostokąta, w którym pięciokąt się zawiera oraz oblicza przynajmniej jedno pole trójkąta wynikające z podziału) 	1p.
3. Oblicza pole P pięciokąta *ABCDE* metodą podziału prostokąta na mniejsze wielokąty: $P = 9\cdot 7 - \left(\frac{5\cdot 4}{2}+\frac{5\cdot 3}{2}+\frac{4\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{(3+2)\cdot 5}{2}\right) = 63-37 = 26.$	1p.

Zadanie 11. (0-3 pkt)

Janek i Julka projektowali siatki ostrosłupów. Najpierw każde z nich narysowało identyczny kwadrat. Następnie Janek podzielił ten kwadrat na trójkąty, a Julka dorysowała trójkąt równoboczny na zewnątrz jednego boku kwadratu i usunęła jeden wielokąt. W ten sposób otrzymali siatki, jak na poniższym rysunku, z których skleili bryły. Różnica pól największej ściany bryły Janka i najmniejszej ściany bryły Julki wynosi 2. Oblicz pola powierzchni całkowitych tych brył oraz ich objętości.

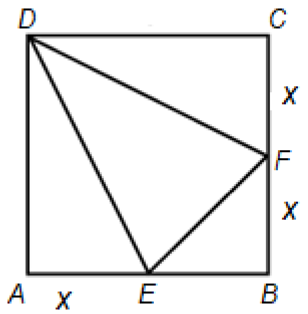




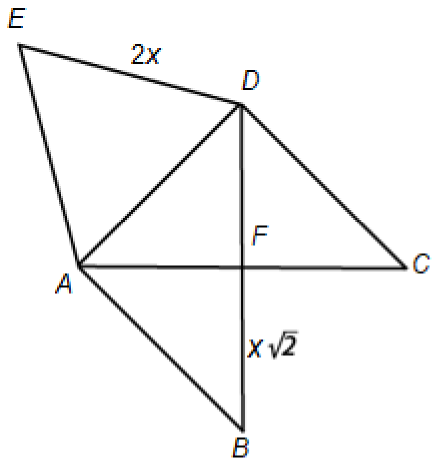
Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia na rysunkach i oblicza wartość x: 1p.

Siatka Janka



Siatka Julki



Największą ścianą bryły Janka jest trójkąt DEF, a jego pole wynosi:

$$4x^2 - 2 \cdot x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2.$$

Najmniejszą ścianą bryły Julki jest np. trójkąt ABF, a jego pole wynosi x^2.

Ponieważ $\frac{3}{2}x^2 - x^2 = \frac{1}{2}x^2 = 2$, więc $x = 2$.

2. Oblicza pola powierzchni całkowitych obu brył: 1p.

P_1 – pole powierzchni całkowitej ostrosłupa Janka,
P_2 – pole powierzchni całkowitej ostrosłupa Julki.

$P_1 = 16$, $\quad P_2 = \frac{3}{4} \cdot 16 + \frac{16\sqrt{3}}{4} = 12 + 4\sqrt{3}$.

3. Oblicza objętości obu brył: V_1 – objętość ostrosłupa Janka, V_2 – objętość ostrosłupa Julki. $V_1 = \frac{P_p \cdot h}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$, $V_2 = \frac{P_p \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.	1p.