



MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP REJONOWY 2023/2024

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	F, F	B., D.	A., D.	N-C.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (0-2 pkt)

Wśród czterech kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejsza jest parzysta, iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest o 35 większy od iloczynu dwóch liczb parzystych. Oblicz średnią arytmetyczną tych czterech liczb.

I sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Zapisuje te liczby w postaci wyrażeń, zapisuje równanie i rozwiązuje je.</p> $2n, \quad 2n + 1, \quad 2n + 2, \quad 2n + 3,$ $(2n + 1)(2n + 3) - 35 = 2n(2n + 2)$ $4n^2 + 6n + 2n + 3 - 35 = 4n^2 + 4n$ $4n = 32,$ <p>zatem $n = 8$.</p> <p>2. Podaje te liczby i oblicza ich średnią arytmetyczną.</p> <p>Te liczby to: 16, 17, 18, 19.</p> $\text{Średnia arytmetyczna} = \frac{16+17+18+19}{4} = \frac{70}{4} = 17,5.$ <p><i>Uwaga. Jeśli uczeń najmniejszą z czterech liczb oznaczy jako n zamiast $2n$ i otrzyma rozwiązanie $n = 16$ oraz obliczy poprawnie średnią arytmetyczną, bez komentarza, że n jest liczbą parzysta, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.</i></p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
---	-----------------------

II sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Zapisuje w postaci wyrażeń te liczby oraz ich średnią arytmetyczną np.:</p> $n, \quad n + 1, \quad n + 2, \quad n + 3,$ $\frac{n + n + 1 + n + 2 + n + 3}{4} = \frac{4n + 6}{4} = n + 1,5.$	1p.
<p>2. Układa równanie korzystając z warunków zadania, rozwiązuje je i oblicza średnią arytmetyczną.</p> $(n + 1)(n + 3) - 35 = n(n + 2)$ $n^2 + 3n + n + 3 - 35 = n^2 + 2n$ $2n = 32, \text{ stąd } n = 16.$ <p>Średnia arytmetyczna to $16 + 1,5 = 17,5$.</p>	1p.

Zadanie 6. (0-2 pkt)

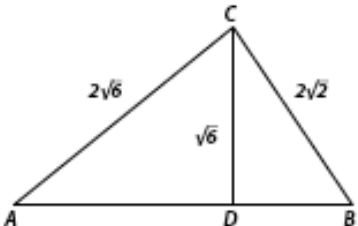
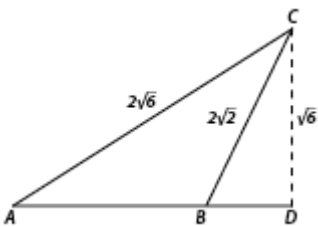
Na parkingu pewnej galerii handlowej ponumerowano miejsca kolejnymi liczbami naturalnymi zaczynając od 1. W tej numeracji 60 razy użyto cyfry 8. Oblicz, ile maksymalnie miejsc może być na tym parkingu.

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przeprowadza analizę zadania, np. za pomocą następującego rozumowania:</p> <p>Od 1 do 79 jest 8 ósemek.</p> <p>Od 80 do 100 jest 12 ósemek, zatem w pierwszej setce jest 20 ósemek.</p> <p>Tak samo jest w drugiej i trzeciej setce, czyli razem w jest 60 ósemek.</p>	1p.
<p>2. Oblicza, ile maksymalnie miejsc może być na tym parkingu.</p> <p>Wyczerpano już wszystkie ósemki, ale nie będzie ósemki do numeru 307. Zatem na tym parkingu może być maksymalnie 307 miejsc.</p>	1p.

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Dana jest prosta AB . Punkt C leży w odległości $\sqrt{6}$ od prostej AB , w odległości $2\sqrt{6}$ od punktu A oraz w odległości $2\sqrt{2}$ od punktu B . Wyznacz miarę kąta ACB . Rozważ wszystkie możliwości.

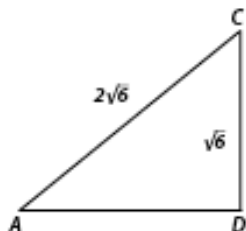
I sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Ustala możliwe położenia punktu C.</p> <p>I przypadek</p>  <p>II przypadek</p> 	1p.
<p>2. Wyznacza miarę kąta ACB w I przypadku.</p> <p>Trójkąty ADC i CDB są prostokątne, stąd</p> $ AD = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{24 - 6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$ $ BD = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2},$ $ AB = 4\sqrt{2},$ $(AB)^2 = 32 \text{ oraz } (AC)^2 + (BC)^2 = (2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 24 + 8 = 32.$ <p>Zatem kąt ACB jest prosty.</p>	1p.
<p>3. Wyznacza miarę kąta ACB w II przypadku.</p> <p>Trójkąt ADC jest połową trójkąta równobocznego, bo $DC = \frac{1}{2} AC$ oraz kąt ADC jest prosty. Zatem kąt ACD ma 60°, a kąt BAC 30°. Ponieważ</p> $ BD = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{2} \text{ oraz } AD = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2},$ <p>więc</p> $ AB = 2\sqrt{2}, \text{ zatem trójkąt } ABC \text{ jest równoramienny, czyli kąt } ACB \text{ ma } 30^\circ.$	1p.

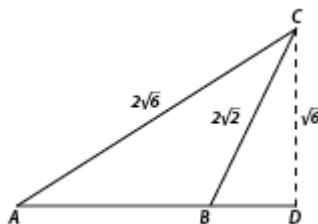
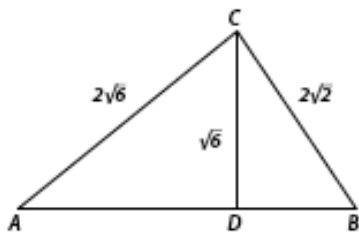
II sposób

Uczeń:

1. Rozpatruje trójkąt ACD , w którym odcinek CD jest odległością punktu C od prostej AB niezależnie od położenia punktu B .



Trójkąt ADC jest połową trójkąta równobocznego, bo $|DC| = \frac{1}{2}|AC|$ oraz kąt ADC jest prosty. Zatem kąt ACD ma 60° .



2. Rozpatruje trójkąt CBD niezależnie od położenia punktu B .

W trójkącie prostokątnym CBD (w obu przypadkach)

$$|BD| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2}.$$

Trójkąt BDC jest połową trójkąta równobocznego, bo $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$ oraz kąt BDC jest prosty. Zatem kąt BCD ma 30° .

3. Wyznacza miarę kąta ACB w obu przypadkach.

Trójkąt BDC może leżeć zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz trójkąta ADC , zatem kąt ACB ma odpowiednio miarę $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ lub $60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

1p.

1p.

1p.

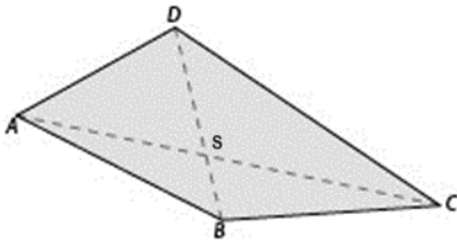
Zadanie 8. (0-3 pkt)

W czworokącie wypukłym przekątne przecinają się pod kątem 120° i dzielą go na cztery trójkąty o polach równych 15. Uzasadnij, że czworokąt jest równoległobokiem. Wykaż, że stosunek długości tych przekątnych wynosi $\frac{\sqrt{3}}{5}$, jeżeli krótsza przekątna ma długość $4\sqrt{3}$.

Uczeń:

1. Uczeń uzasadnia, że opisany czworokąt jest równoległobokiem.

1p.



Zauważa, że $P_{ABD} = P_{ABS} + P_{ASD} = 30$ oraz $P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS} = 30$.

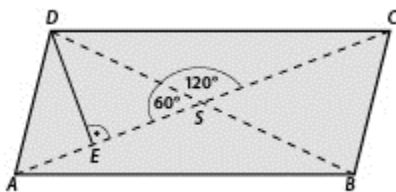
Ponieważ trójkąty ABD i ABC mają wspólną podstawę AB oraz równe pola to ich wysokości są tej samej długości. Zatem punkty C i D leżą w tej samej odległości od odcinka AB , czyli odcinki AB i CD są równoległe.

Analogicznie w trójkątach ABC i DBC . Zatem odcinki AD i BC są równoległe.

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem co było do uzasadnienia.

2. Oblicza długość dłuższej przekątnej równoległoboku.

1p.



$$|DS| = 2\sqrt{3}$$

$$|DE| = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3, \text{ jako wysokość trójkąta równobocznego o boku } DS.$$

$$P_{ACD} = \frac{|AC| \cdot 3}{2} = 30$$

$$|AC| = \frac{60}{3} = 20$$

<p>3. Oblicza stosunek długości przekątnych.</p> $\frac{ AC }{ DB } = \frac{20}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \quad \text{lub} \quad \frac{ DB }{ AC } = \frac{4\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{5} \text{ co należało wykazać.}$	1p.
--	-----

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Oblicz, dla jakich liczb całkowitych x , liczba $x^2 + 12x + 15$ jest kwadratem liczby 10.

I sposób

<p>Uczeń:</p>	
<p>1. Przekształca dane wyrażenie do innej postaci, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia np.:</p> $x^2 + 12x + 15 = x^2 + 12x + 36 - 21 = (x + 6)^2 - 21.$	1p.
<p>2. Zapisuje równanie i przekształca je w postać iloczynową, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia.</p> $(x + 6)^2 - 21 = 100$ $(x + 6)^2 - 11^2 = 0$ $(x + 6 + 11)(x + 6 - 11) = 0$ $(x + 17)(x - 5) = 0.$	1p.
<p>3. Rozwiązuje równanie i sprawdza, czy otrzymane liczby spełniają warunki zadania.</p> $x + 17 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 5 = 0$ $x = -17 \quad \text{lub} \quad x = 5.$	1p.
<p>Sprawdzenie</p> <p>Dla $x = -17$ mamy $(-17)^2 + 12 \cdot (-17) + 15 = 289 - 204 + 15 = 100.$</p> <p>Dla $x = 5$ mamy $5^2 + 12 \cdot 5 + 15 = 25 + 60 + 15 = 100.$</p> <p><i>Uwaga. Jeśli uczeń znajdzie te liczby, a nie sprawdzi, czy spełniają one warunki zadania, to też otrzymuje maksymalną liczbę punktów.</i></p>	

II sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przekształca dane wyrażenie do innej postaci, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia np.:</p> $x^2 + 12x + 15 = x^2 + 12x + 36 - 21 = (x + 6)^2 - 21.$	1p.
<p>2. Zapisuje równanie i przekształca je w postać iloczynową, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia.</p> $(x + 6)^2 - 10^2 = 21$ $(x + 6 + 10)(x + 6 - 10) = 21$ $(x + 16)(x - 4) = 21.$	1p.
<p>3. Rozwiązuje równanie i sprawdza, które liczby spełniają warunki zadania i podaje odpowiedź.</p> <p>Liczby $x + 16$ i $x - 4$ są całkowite oraz $x + 16 > x - 4$, a ich iloczyn wynosi 21. Sprawdzamy iloczyny:</p> $21 \cdot 1, -1 \cdot (-21), 7 \cdot 3, -3 \cdot (-7).$ <p>Gdy $x + 16 = 21$, to $x = 5$, wtedy $x - 4 = 5 - 4 = 1$, więc dla $x = 5$ $(x + 16)(x - 4) = 21.$</p> <p>Gdy $x + 16 = -1$, to $x = -17$, wtedy $x - 4 = -17 - 4 = -21$, więc dla $x = -17$ $(x + 16)(x - 4) = 21.$</p> <p>Gdy $x + 16 = 7$, to $x = -9$, wtedy $x - 4 = -9 - 4 = -13 \neq 3$, więc dla $x = -9$ $(x + 16)(x - 4) \neq 21.$</p> <p>Gdy $x + 16 = -3$, to $x = -19$, wtedy $x - 4 = -19 - 4 = -23 \neq -7$, więc dla $x = -19$ $(x + 16)(x - 4) \neq 21.$</p> <p>Odpowiedź. Tymi liczbami są 5 i -17.</p>	1p.

III sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Zapisuje równanie i przekształca je do innej postaci np.:</p> $x^2 + 12x + 15 = 100$ $x(x + 12) = 85.$ <p>2. Zapisuje lewą stronę równania za pomocą iloczynu liczb całkowitych.</p> <p>Ponieważ liczby x i $x + 12$ są całkowite oraz $x < x + 12$, więc mogą zachodzić następujące równania:</p> $x(x + 12) = 1 \cdot 85,$ $x(x + 12) = -85 \cdot (-1),$ $x(x + 12) = 5 \cdot 17,$ $x(x + 12) = -17 \cdot (-5).$ <p>3. Sprawdza, które liczby spełniają warunki zadania i podaje odpowiedź.</p> <p>Gdy $x = 1$, to $x + 12 = 13$, więc dla $x = 1$ $x(x + 12) \neq 85$.</p> <p>Gdy $x = -85$, to $x + 12 = -72$, więc dla $x = -85$ $x(x + 12) \neq 85$.</p> <p>Gdy $x = 5$, to $x + 12 = 17$, więc dla $x = 5$ $x(x + 12) = 85$.</p> <p>Gdy $x = -17$, to $x + 12 = -5$, więc dla $x = -17$ $x(x + 12) = 85$.</p> <p>Odpowiedź. Tymi liczbami są 5 i -17.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	----------------------------------

Zadanie 10. (0-3 pkt)

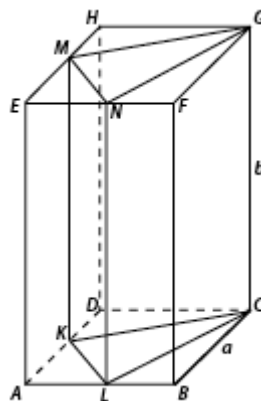
Klocek w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDEFGH$ rozcięto na cztery klocki każdy w kształcie graniastosłupa prostego trójkątnego. Podstawą jednego z nich jest trójkąt, którego dwa wierzchołki K i L są środkami krawędzi podstawy graniastosłupa czworokątnego, trzeci wierzchołek jest jednym z wierzchołków tej podstawy, a ponadto żadna ze ścian bocznych tego graniastosłupa trójkątnego nie zawiera się w żadnej ścianie graniastosłupa czworokątnego. Oblicz, ile procent objętości największego z otrzymanych po rozcięciu klocków stanowi objętość najmniejszego klocka.

Wynik podaj z dokładnością do 1%.

I sposób

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Oblicza pola podstaw otrzymanych klocków.

$$P_{ALK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}, \quad P_{LBC} = P_{KCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4},$$

$$P_{KLC} = a^2 - \frac{a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{8a^2 - a^2 - 4a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}.$$

1p.

3. Oblicza z dokładnością do 1%, ile procent objętości największego z otrzymanych klocków, stanowi objętość najmniejszego klocka.

Ponieważ wszystkie powstałe klocki mają taką samą wysokość, największą objętość ma ten klocek, którego pole podstawy jest największe.

Zatem największą objętość ma klocek $KLCMNG$, a najmniejszą klocek $ALKENM$.

1p.

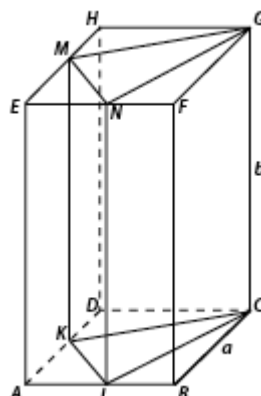
Stosunek objętości klocka $ALKENM$ do objętości klocka $KLCMNG$ wynosi:

$$\frac{a^2}{8} : \frac{3a^2}{8} = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{8}{3a^2} = \frac{1}{3}, \text{ czyli około } 33\%.$$

II sposób

Uczeń:

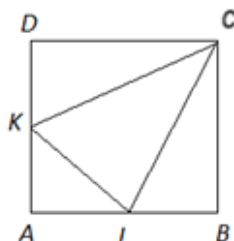
1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Przedstawia podział podstawy graniastosłupa na cztery trójkąty np. za pomocą rysunku i porównuje ich pola.

1p.



Trójkąty LBC i KDC mają jednakowe pola, a pole trójkąta KAL jest najmniejsze i stanowi połowę pola trójkąta LBC (KDC). Suma pól dwóch jednakowych trójkątów jest równa sumie pól dwóch pozostałych trójkątów. Zatem trójkąt KLC ma największe pole.

3. Oblicza z dokładnością do 1%, ile procent objętości największego z otrzymanych klocek stanowi objętość najmniejszego klocka.

1p.

Ponieważ wszystkie powstałe klocki mają taką samą wysokość, największą objętość ma ten klocek, którego pole podstawy jest największe.

Zatem największą objętość ma klocek $KLCMNG$, a najmniejszą klocek $ALKENM$.

Objętości poszczególnych graniastosłupów stanowią odpowiednio $1/8$, $1/4$, $1/4$ i $3/8$ objętości całego graniastosłupa czworokątnego

Stosunek objętości klocka $ALKENM$ do objętości klocka $KLCMNG$ wynosi:

$$\frac{1}{8} : \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}, \text{ czyli około } 33\%.$$